



TITLE:

On moments of the noncentral Wishart distributions and weighted generating functions of matchings (Combinatorial Representation Theory and its Applications)

AUTHOR(S):

栗木, 哲; 沼田, 泰英

---

CITATION:

栗木, 哲 ...[et al]. On moments of the noncentral Wishart distributions and weighted generating functions of matchings (Combinatorial Representation Theory and its Applications). 数理解析研究所講究録 2011, 1738: 142-154

ISSUE DATE:

2011-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170854>

RIGHT:

# On moments of the noncentral Wishart distributions and weighted generating functions of matchings.

栗木 哲 (統計数理研究所, JST CREST)

沼田 泰英 (東大 情報理工, JST CREST)

## 概要

多変量正規分布に従うベクトルの分散共分散行列が従う確率分布は, Wishart 分布と呼ばれ, よく研究されている. 非心実 (複素)Wishart 分布のモーメントに対し, あるグラフの重みつき母関数を用いた表示を与えることができた. この母関数は determinant や Hafnian の analogue と思えるような多項式である. この表示を通して, パラメータが特別な非心実 (複素)Wishart 分布のいくつかのモーメントを求めることが, 条件を満たすグラフを数え上げることに帰着される.

## 1 Introduction

まずモーメントについて簡単に説明する.  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  はある分布  $D$  に従うランダムベクトルであるとする. このとき  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_m)$  に対し,  $\mathbf{x}^{\mathbf{n}} = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$  の平均  $\mathbb{E}[x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}]$  を分布  $D$  の ( $\mathbf{n}$ -次) モーメントと呼ぶ. ある分布  $D$  が与えられたときに,  $D$  のモーメントを具体的に求めよという自然な問題が思い付く.

次に実 Wishart 分布と呼ばれる確率分布について簡単に説明する. 実数を成分とする  $p \times \nu$  次行列  $M$  と  $p \times p$  次対称行列  $\Sigma = (\sigma_{i,j})$  を fix し  $(\mu_1, \dots, \mu_\nu)$  は  $M$  の列ベクトル分解とする. このとき,  $X_1 = (x_{i1})_{1 \leq i \leq p}$ ,  $X_2 = (x_{i2})_{1 \leq i \leq p}$ ,  $\dots$ ,  $X_\nu = (x_{i\nu})_{1 \leq i \leq p}$  を  $\nu$  個の  $p$  次元のランダムベクトルとし, それぞれ  $N_p(\mu_1, \Sigma), \dots, N_p(\mu_\nu, \Sigma)$  に独立に従っているとする, ただし,  $N_p(\mu_i, \Sigma)$  は平均ベクトルが  $\mu_i$ , 分散共分散行列が  $\Sigma$  であるような多変量 (実) 正規分布とする.  $X$  を  $(X_1, \dots, X_\nu)$  なる  $\nu \times p$  行列とし,  $W = (w_{ij})$  を  $W = X \cdot {}^tX$  で定義する. このとき,  $W$  は対称なランダム行列となるが,  $W$  が従う分布を実非心 Wishart 分布と呼ぶ.  $p, \nu, \Sigma, M$  に対して, 実非心 Wishart 分布を定義したが, 実は,  $p, \nu, \Sigma, \Delta = M \cdot {}^tM$  が等しいときに, 分布が等しくなることが知られている. そこでこの分布を, ここでは, パラメータとして  $p, \nu, \Sigma, \Delta$  を採用し, 実非心 Wishart 分布  $W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  と呼ぶことにする.  $\Delta$  は mean square matrix と呼ばれ,  $\Delta = 0$  の時には  $W_p(\nu, \Sigma, 0)$  は中心 Wishart 分布  $W_p(\nu, \Sigma)$  とよばれる.

次に多変量複素正規分布について簡単に述べた後, 複素 Wishart 分布について簡単に説明する.  $A$  を  $p \times p$  次 (実) 対称行列とし,  $B$  を  $p \times p$  次 (実) 反対称行列とする. また,  $\xi$  と  $\eta$  を  $p$  次元の実 (列) ベクトルとする.  $\mathbf{x} = (x_i)$ ,  $\mathbf{y} = (y_i)$ , はともに  $p$  次元のランダム (列) ベクトルで, それらを縦にな

らべた  $2p$  次元のランダムベクトル  $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$  が多変量実正規分布  $N_p\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\right)$  に従っているとする。この時、複素数を成分とするランダムベクトル  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \sqrt{-1}\mathbf{y}$  の従う分布は多変量複素正規分布  $CN_p(\xi + \sqrt{-1}\eta, 2(A + \sqrt{-1}B))$  と呼ばれる。  $p$  次元複素列ベクトル  $\boldsymbol{\mu} = \xi + \sqrt{-1}\eta$  は平均ベクトル、  $p \times p$  次エルミート行列  $\Sigma = 2(A + \sqrt{-1}B)$  は分散共分散行列と呼ばれるが、実際  $\Sigma = \mathbb{E}[(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}) \cdot {}^t(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu})]$  を満たしている (ただし  $\bullet$  は複素共役を表す)。実 Wishart 分布の時と同様の方法で、多変量複素正規分布を用いて複素 Wishart 分布を定義する。複素数を成分とする  $p \times \nu$  次行列  $M$  と  $p \times p$  次エルミート行列  $\Sigma = (\sigma_{ij})$  を fix し、  $(\mu_1, \dots, \mu_\nu)$  は  $M$  の列ベクトル分解とする。このとき、  $X_1 = (x_{i1})_{1 \leq i \leq p}$ ,  $X_2 = (x_{i2})_{1 \leq i \leq p}$ ,  $\dots$ ,  $X_\nu = (x_{i\nu})_{1 \leq i \leq p}$  を  $\nu$  個の  $p$  次元の複素数値ランダムベクトルとし、それぞれ多変量複素正規分布  $CN_p(\mu_1, \Sigma), \dots, CN_p(\mu_\nu, \Sigma)$  に独立に従っているとする。  $X$  を  $(X_1, \dots, X_\nu)$  なる  $\nu \times p$  行列とし、  $W = (w_{ij})$  を  $W = X \cdot {}^t\bar{X}$  で定義する。このとき、ランダムエルミート行列  $W$  が従う分布を複素非心 Wishart 分布と呼ぶ。実 Wishart 分布の時と同様に、  $p, \nu, \Sigma, \Delta = M \cdot {}^t\bar{M}$  が等しいときに、分布が等しくなることが知られている。そこでこの分布を、ここでは、パラメータとして  $p, \nu, \Sigma, \Delta$  を採用し、複素非心 Wishart 分布  $CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  と呼ぶことにする。

Wishart[15] によって導入された Wishart 分布は基本的な多変量分布のうちのひとつであり、様々な分野で興味を持たれ研究されている (例えば, [1], [8] など)。また、そのモーメントについてもよく研究されており、特に中心 Wishart 分布については、Lu, Richards [7], Graczyk, Letac, Massam [3, 4], Vere-Jones [13] などの先行研究がある。また、最近では Letac, Massam [6] による非心 Wishart 分布のモーメントに関する研究結果もあり、本稿とは異なるタイプの公式が与えられている。一方、中心 Wishart 分布においては、逆行列についてのモーメントに関しても、Matsumoto [10] などの結果がある。また、モーメントの母関数は知られており、実 Wishart 分布の場合には次の様に見える：

$$\mathbb{E}[e^{\text{tr}(\Theta W)}] = \det(I - 2\Theta\Sigma)^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{1}{2}\text{tr}(I - 2\Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Delta}.$$

ただしここで、  $\Theta$  は  $p \times p$  symmetric parameter matrix である。また、複素 Wishart 分布の場合は、

$$\mathbb{E}[e^{\text{tr}(\Theta W)}] = \det(I - \Theta\Sigma)^{-\nu} e^{\text{tr}(I - \Theta\Sigma)^{-1}\Theta\Delta}$$

と書ける。ただし、  $\Theta$  は  $p \times p$  hermitian parameter matrix である。(詳しくは [2, 11] などを参照されたい)。

本稿の目標は Wishart 分布のモーメント  $\mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}]$  を具体的に記述することである。我々は、まず determinant などの analogue と思える多項式をグラフの言葉を用いて定義する。その多項式を用い一般のモーメント  $\mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}]$  の公式を記述する。証明など詳細は [5] を参照されたい。

## 2 Notation of graphs

本稿では、有向グラフと無向グラフの両方をそれぞれ扱う。有向グラフは複素 Wishart 分布のモーメントを記述する際に用い、無向グラフは実 Wishart 分布のモーメントを記述する際に用いる。議論は有向グラフの場合と無向グラフの場合とで概ねパラレルに進む。本稿では原則として、無向グラフでの記号は有向グラフでの対応する記号に ' をつけたものを用いた。

### 2.1 Nondirected graphs

まず、無向グラフに関する記号を用意する。  $v \neq w$  に対し、  $v$  と  $w$  の間の無向辺を  $\{v, w\}$  であらわす。よく行われるように、頂点  $v, w$  を線で結び図示することもある。任意の  $v \neq w$  に対し、  $\{v, w\} = \{w, v\}$  である。なお本稿では無向グラフにおいては、self loop  $\{v, v\}$  は考えない。

頂点の集合  $V, U$  に対し、  $K'_V$  と  $K'_{V,U}$  を次で定義する：

$$\begin{aligned} K'_{V,U} &= \{ \{v, u\} \mid v \in V, u \in U, v \neq u \}, \\ K'_V &= K'_{V,V} = \{ \{v, u\} \mid v \neq u \in V \}. \end{aligned}$$

有限集合  $V'$  と  $E' \subset K'_V$  の組  $G' = (V', E')$  を無向グラフと呼び、

$$\text{vertex}(E') = \{ v \in V' \mid \{v, u\} \in E' \text{ for some } u \in V' \}$$

とおく。

**Definition 2.1.**  $(V', K')$  を無向グラフとする。次の条件を満たす  $E' \subset K'$  を  $(V', K')$  内のマッチングという：

$$\{v, u\}, \{v, u'\} \in E' \implies u = u'.$$

マッチングであるための条件は、“どの頂点の次数（その頂点を端点とする辺の数）も高々 1 である”とも言い替えることができる。  $\mathcal{M}'(V', K')$  を  $(V', K')$  内のマッチング全体からなる集合とする。また、完全グラフ  $(V', K'_{V'})$  内のマッチング全体からなる集合  $\mathcal{M}'(V', K'_{V'})$  を  $\mathcal{M}'(V')$  で表す。また、  $(V', K')$  内のマッチング  $E'$  が  $\text{vertex}(E') = V'$  を満たすとき、  $E'$  は perfect であるという。マッチングが perfect であるための条件は“どの頂点の次数もちょうど 1”とも言い替えることが出来る。  $\mathcal{P}'(V', K')$  を  $(V', K')$  内の perfect matchings からなる集合とする。また  $\mathcal{P}'(V') = \mathcal{P}(V', K'_{V'})$  とする。

**Example 2.2.** 図 1(a) に挙げたグラフは次数が 2 の頂点を持つのでマッチングではないが、図 1(b), 1(c) に挙げたグラフはどちらもマッチングである。また図 1(b) は辺がない頂点があるので perfect ではないが、1(c) に挙げたグラフは全ての頂点が某かの辺の端点となっているので perfect である。

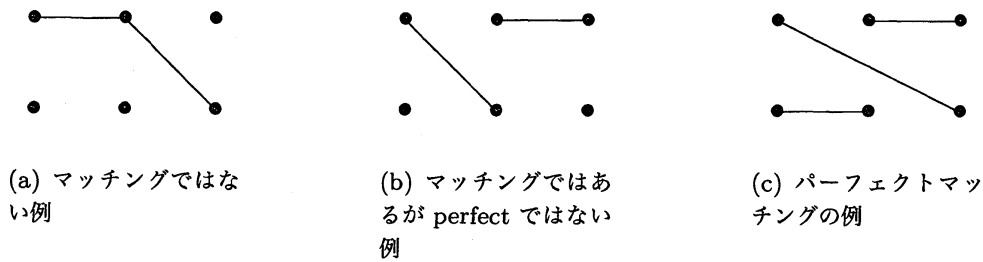


図1 無向グラフにおけるマッチングの例

## 2.2 Directed graphs

次に有向グラフについての記号を用意する.  $v$  から  $w$  への有向辺を  $(v, u)$  で表す. よく行われるように, 始点  $v$  から終点  $u$  へ矢印を引くことで図示することもある.  $v \neq u$  に対し,  $(v, u) \neq (u, v)$  である. なお, 本稿では有向グラフにおいては, self loop  $(v, v)$  も含めて考える. また, サイクルと言った場合は self loop も含めるものとする.

頂点の集合  $V, U$  に対して,  $K_V$  と  $K_{V,U}$  を

$$K_{V,U} = \{ (v, u) \mid v \in V, u \in U \},$$

$$K_V = K_{V,V} = \{ (v, u) \mid v, u \in V \}$$

で定義する. 有限集合  $V$  と  $E \subset K_V$  の組  $G = (V, E)$  を有向グラフといい,  $\text{start}(E)$  と  $\text{end}(E)$  を次のように定義する:

$$\text{start}(E) = \{ v \in V \mid (v, u) \in E \text{ for some } u \in V \},$$

$$\text{end}(E) = \{ u \in V \mid (v, u) \in E \text{ for some } v \in V \}.$$

**Definition 2.3.**  $(V, K)$  を有向グラフとする. 次の2条件を満たす  $E \subset K$  を  $(V, K)$  内のマッチングと呼ぶ:

$$(v, u), (v, u') \in E \implies u = u'$$

$$(v, u), (v', u) \in E \implies v = v'.$$

マッチングであるための条件は, “どの頂点の出次数 (その頂点を始点とする辺の数) も入次数 (その頂点を終点とする辺の数) も高々1” と言い替えることが出来る.  $(V, K)$  内のマッチング全てからなる集合を  $\mathcal{M}(V, K)$  で表す. マッチング  $E \in \mathcal{M}(V, K)$  が  $\text{start}(E) = V$  と  $\text{end}(E) = V$  を満たすとき, perfect であるといい,  $\mathcal{P}(V, K)$  で  $(V, K)$  内の perfect matching 全てからなる集合を表す. Perfect matching であるための条件は “どの頂点の出次数も入次数も1” とも言替えることが出来る. また,  $\mathcal{M}(V) = \mathcal{M}(V, K_V)$ ,  $\mathcal{P}(V) = \mathcal{P}(V, K_V)$  とする.

**Example 2.4.** 図2(a)に挙げたグラフは中央の頂点の入次数が2であるため, 図2(b)に挙げたグラフは中央の頂点の出次数が2であるため, どちらもマッチングではない. またマッチングで

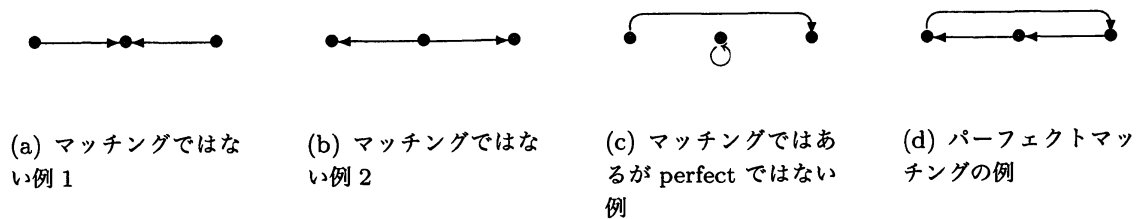


図 2 有向グラフにおけるマッチングの例

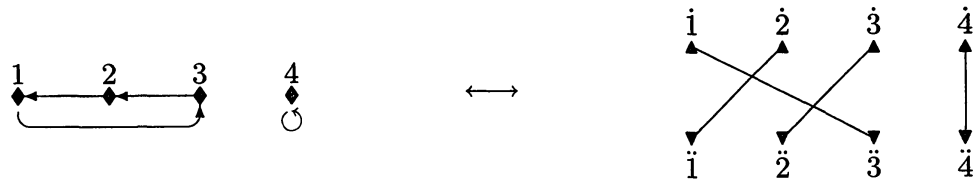


図 3 有向グラフと二部無向グラフの対応の例

あるための条件はこれらのパターンを含まないことと言い替えることもできる. 図 2(c) に挙げたグラフはマッチングではあるが, 左の頂点の入次数は 0 であり, また右の頂点の出次数も 0 であるので, perfect ではない. 図 2 に挙げたグラフ達の中では, 図 2(d) に挙げたグラフのみが perfect matching である.

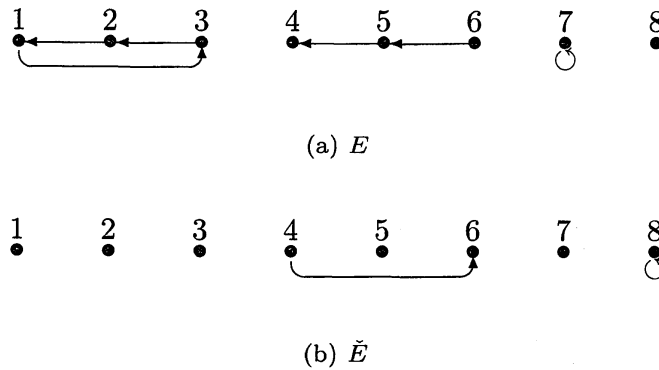
**Remark 2.5.** おそらく,  $E \in \mathcal{M}(V, K)$  を (有向グラフでの) マッチングと呼ぶのは標準的ではない. しかしながら本稿では次の理由でマッチングと呼ぶ:  $V \subset \mathbb{Z}$  とし,  $\dot{V} = \{\dot{v} | v \in V\}$ ,  $\ddot{V} = \{\ddot{v} | v \in V\}$  とする, ただし  $\dot{l} = 2l - 1$ ,  $\ddot{l} = 2l$  とする. このとき, 有向グラフ  $(V, E)$  と 2 部グラフ  $(\dot{V}, \ddot{V}, \{\{\dot{v}, \ddot{u}\} | (v, u) \in E\})$  を同一視するすることができる. この同一視を通して,  $\mathcal{M}(V, K)$  の元を 2 部グラフ  $(\dot{V}, \ddot{V}, \{\{\dot{v}, \ddot{u}\} | v, u \in K\})$  内のマッチングと思うことができる. この意味で  $\mathcal{M}(V, K)$  の元をマッチングと呼ぶ. また, この同一視を通して,  $\mathcal{P}(V, K)$  の元は 2 部グラフ 2 部グラフ  $(\dot{V}, \ddot{V}, \{\{\dot{v}, \ddot{u}\} | v, u \in K\})$  内の perfect matching と思うことができる. (図 3)

### 3 Definition of our polynomials

$l \in \mathbb{Z}$  に対して,  $\dot{l} = 2l - 1$ ,  $\ddot{l} = 2l$  とおく.  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$  を fix し, 頂点集合  $V, V'$  を次のように fix する:  $V = [n] = \{1, \dots, n\}$ ,  $\dot{V} = [\dot{n}] = \{\dot{1}, \dots, \dot{n}\}$ ,  $\ddot{V} = [\ddot{n}] = \{\ddot{1}, \dots, \ddot{n}\}$ ,  $V' = \dot{V} \amalg \ddot{V} = [\dot{n}] \amalg [\ddot{n}] = [2n]$ .

#### 3.1 Directed graphs

まず, 有向グラフを考える.  $E \in \mathcal{M}(V)$  とする. このとき  $(V, E)$  の (極大な) 連結成分は弦のないサイクル (self loop を含む) またはチェイン (孤立点を含む) のいずれかである.  $V \setminus \text{start}(E)$  は

図4  $E \in \mathcal{M}(V)$  に対する  $\check{E}$ 

チェインの終点たちからなる集合であり,  $V \setminus \text{end}(E)$  は始点たちからなる集合である. この事実に着目し,  $\check{E}$  を次で定義する:

$$\check{E} = \{ (v, u) \in K_{V \setminus \text{start}(E), V \setminus \text{end}(E)} \mid E \text{ 内に } u \text{ から } v \text{ へのチェインが存在する.} \} \\ \subset K_V,$$

$\text{len}(E) = (V, E)$  内のサイクルの個数.

**Example 3.1.**  $V = [8]$ , 図4(a) に挙げたグラフを  $E$  としたとき,  $(V, E)$  の連結成分でサイクルになっているものは,  $(3, 2)(2, 1)(1, 3)$  というサイクルと,  $(7, 7)$  というセルフループの二つのみである. したがって,  $\text{len}(E) = 2$  である. また,  $(V, E)$  の連結成分でチェインになっているものは,  $(6, 5)(5, 4)$  というチェインと 8 という孤立点であるので,  $\check{E} = \{ (4, 6), (8, 8) \}$  であり, 図4(b) に挙げたグラフである.

**Remark 3.2.**  $E \in \mathcal{M}(V)$  に対し,  $\check{E}$  は次の条件を満たすものとして定義することも出来る:

- $\check{E} \in \mathcal{M}(V)$ ,
- $\check{E} \cap E = \emptyset$ ,
- $\check{E} \cup E \in \mathcal{P}(E)$ ,
- $(V, E)$  の連結成分の総数と  $(V, \check{E} \cup E)$  の連結成分の総数は等しい.

**Remark 3.3.**  $E \in \mathcal{M}(V)$  に対して,  $\text{len}(E)$  を次のように定義することも出来る:

$$\text{len}(E) = ((V, E) \text{ の連結成分の個数}) - |\check{E}|.$$

また,  $E \in \mathcal{P}(V)$  と,  $(i, j) \in E$  に対し  $\sigma_E(i) = j$  となるような  $n$  次対称群  $S_n$  の元  $\sigma_E$  を同一視することが出来るが, 任意の  $E$  に対し,  $\text{len}(E)$  は  $\sigma_E$  のサイクルの数に等しい.

有向グラフ  $(V, E)$  と変数  $x = (x_{i,j})$  に対し, weight monomial  $x^E$  を

$$x^E = \prod_{(v,u) \in E} x_{v,u}$$

と定義する. これらの記法を用いてマッチングの母関数を次の様に定義する:

**Definition 3.4.**  $K \subset K_V$  に対し,  $\det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K)$  と  $\det_\alpha(\mathbf{x}; K)$  を次で定義する:

$$\det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K) = \sum_{E \in \mathcal{M}(V, K)} \alpha^{n - \text{len}(E)} \mathbf{x}^E \mathbf{y}^{\tilde{E}},$$

$$\det_\alpha(\mathbf{x}; K) = \sum_{E \in \mathcal{P}(V, K)} \alpha^{n - \text{len}(E)} \mathbf{x}^E.$$

また,  $\det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K_V)$ ,  $\det_\alpha(\mathbf{x}) = \det_\alpha(\mathbf{x}; K_V)$  とおく.

**Remark 3.5.** 定義より  $\det_\alpha(\mathbf{x}; K) = \det_\alpha(\mathbf{x}, 0; K)$ . また,  $\det_\alpha(0, \mathbf{y}; K) = \alpha^n \det_0(\mathbf{y}) = \det_0(\alpha \mathbf{y}) = \alpha^n y_{11} \cdots y_{nn}$ .

**Remark 3.6.** 正方行列  $A = (a_{ij})$  に対し,  $\alpha$ -determinant (or  $\alpha$ -permanent) とは次のように定義される多項式のことである:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha^{n - \text{len}(\sigma)} a_{1, \sigma(1)} a_{2, \sigma(2)} \cdots a_{n, \sigma(n)}.$$

この多項式は determinant および permanent の  $\alpha$ -analogue である; すなわち,  $\alpha$ -determinant は  $\alpha = -1$  とすれば determinant であり,  $\alpha = 1$  とすれば permanent である. (See also [13, 14].) Remark 3.3 での同一視を通して,  $\alpha$ -determinant は我々の多項式  $\det_\alpha(A)$  そのものであることがわかる.

### 3.2 Nondirected graphs

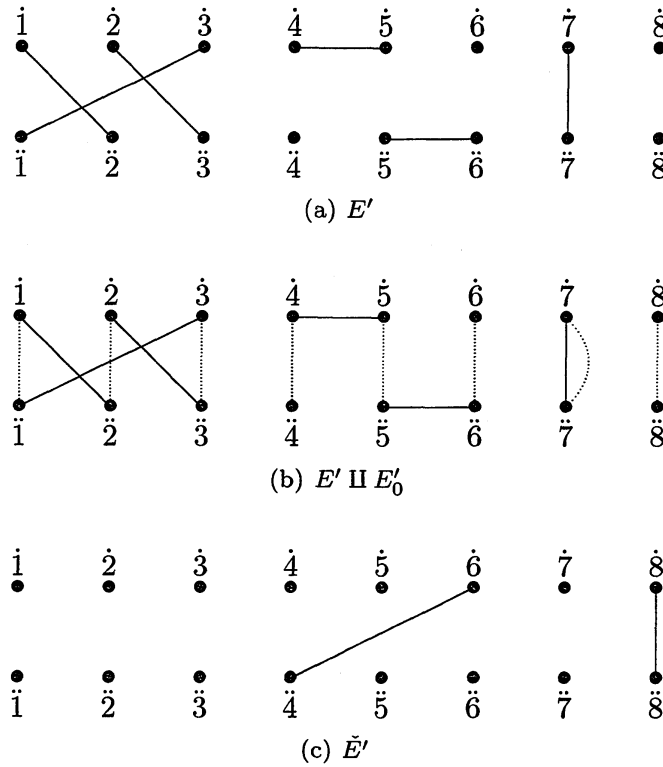
次に, 無向グラフの場合を考える.  $\{\{1, \bar{1}\}, \dots, \{n, \bar{n}\}\} \subset K'_{V, \bar{V}}$  という辺集合を  $E'_0$  で表す.  $E' \in \mathcal{M}'(V')$  に対し, 多重辺を許す無向グラフ  $(V', E' \amalg E'_0)$  を考える. この時,  $(V', E' \amalg E'_0)$  の (極大な) 連結成分は弦のないサイクルもしくはチェインのいずれかである. チェインの端点となっている頂点を集めて来た集合は,  $E'$  で使われていない頂点を集めて来た集合  $V' \setminus \text{vertex}(E')$  に一致する. この事実に着目し,  $\tilde{E}'$  と  $\text{len}(E')$  を次で定義する:

$$\tilde{E}' = \left\{ \{v, u\} \in K'_{V' \setminus \text{vertex}(E')} \mid \begin{array}{l} E' \amalg E'_0 \text{ の連結成分として} \\ v \text{ を } u \text{ 端点とするチェインが存在する.} \end{array} \right\}$$

$\text{len}(E') = (V', E' \amalg E'_0)$  内のサイクルの総数.

**Example 3.7.** 図 5(a) に挙げたグラフを  $(V', E')$  とおく. このとき  $(V', E' \amalg E'_0)$  は図 5(b) に挙げたグラフである. 図 5(b) の連結成分でサイクルとなっているものは,  $\bar{1}-1-2-2-3-3-\bar{1}$  というサイクルと,  $\bar{7}-7-7$  というサイクルの 2 個であるので  $\text{len}(E') = 2$  である. また, チェインとなっているのは,  $\bar{4}-4-5-5-6-6$  と  $\bar{8}-8$  との 2 個であるので,  $\tilde{E}' = \{\{\bar{4}, 6\}, \{\bar{8}, 8\}\}$  となる.  $\tilde{E}'$  を図示すると図 5(c) となる.



図5  $E' \in \mathcal{M}'(V')$  に対する  $\tilde{E}'$ 

**Remark 3.8.**  $E' \in \mathcal{M}'(V')$  に対して,  $\tilde{E}'$  は次の条件を満たすものとしても定義することができる:

- $\tilde{E}' \in \mathcal{M}'(V')$ ,
- $\tilde{E}' \cap E' = \emptyset$ ,
- $\tilde{E}' \cup E' \in \mathcal{P}'(E')$ ,
- $(V', E' \amalg E_0)$  の連結成分の総数と  $(V', \tilde{E}' \amalg E' \amalg E_0)$  の連結成分の総数が等しい.

無向グラフ  $(V', E')$  と変数  $\mathbf{x} = (x_{i,j})$  に対し, weight monomial  $\mathbf{x}^{E'}$  を

$$\mathbf{x}^{E'} = \prod_{\{v,u\} \in E'} x_{v,u}$$

と定義する. 任意の  $v, u \in V'$  に対し  $x_{v,u} = x_{u,v}$  となっていれば,  $\mathbf{x}^{E'}$  は well-defined となる.

**Definition 3.9.**  $K' \subset K'_{V'}$  に対し,  $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K')$  および  $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K')$  を次で定義する:

$$\begin{aligned} \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K') &= \sum_{E' \in \mathcal{M}'(V', K')} \alpha^{n - \text{len}(E')} \mathbf{x}^{E'} \mathbf{y}^{\tilde{E}'}, \\ \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K') &= \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V', K')} \alpha^{n - \text{len}(E')} \mathbf{x}^{E'}. \end{aligned}$$

また  $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}; K'_{V'})$ ,  $\text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}) = \text{Hf}_\alpha(\mathbf{x}; K'_{V'})$  とおく.

**Remark 3.10.** 定義より,  $\text{Hf}_\alpha(x; K') = \text{Hf}_\alpha(x, 0; K')$ . また,  $\text{Hf}_\alpha(0, y; K') = \alpha^n \text{Hf}_0(y) = \text{Hf}_0(\alpha y) = \alpha^n y_{1\bar{1}} \cdots y_{n\bar{n}}$ .

**Remark 3.11.** [9] では  $\alpha$ -Pfaffian という, skew-symmetric matrix  $A$  に対し次で定義される多項式が導入されている:

$$\text{Pf}_\alpha(A) = \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V')} (-\alpha)^{n-\text{len}(E')} \text{sgn}(E') A^{E'}.$$

ただしここで,  $\text{sgn}(E') A^{E'}$  は  $E' = \{\{x_1, x_{\bar{1}}\}, \dots, \{x_n, x_{\bar{n}}\}\}$  となる  $x \in S_{2n}$  に対して  $\text{sgn}(x) a_{x_1, x_{\bar{1}}} \cdots a_{x_n, x_{\bar{n}}}$  で定義される単項式であり, いま  $A$  は skew symmetric であるので  $\text{sgn}(E') A^{E'}$  は  $x \in S_{2n}$  の選び方によらずに決まる.  $\alpha$ -Pfaffian は Pfaffian の  $\alpha$ -analogue である, すなわち,  $\alpha = -1$  で  $\alpha$ -Pfaffian は通常の Pfaffian  $\text{Pf}(A)$ , i.e.,  $\sum \text{sgn}(x) a_{x_1, x_{\bar{1}}} \cdots a_{x_n, x_{\bar{n}}}$ , に他ならない.

一方, symmetric matrix  $B$  に対して我々の多項式  $\text{Hf}_\alpha(B)$  は

$$\text{Hf}_\alpha(B) = \sum_{E' \in \mathcal{P}'(V')} \alpha^{n-\text{len}(E')} B^{E'}$$

であるが, これは,  $\alpha = 1$  のとき, 通常の Hafnian  $\text{Hf}(B) = \sum b_{x_1, x_{\bar{1}}} \cdots b_{x_n, x_{\bar{n}}}$  となる. この意味で我々の多項式は Hafnian の analogue である.

## 4 Main results

$\det_\alpha(x, y)$ ,  $\text{Hf}_\alpha(x, y)$  を用い Wishart 分布のモーメントを記述することが出来る. 証明等の詳細は [5] を参照されたい.

**Proposition 4.1.**  $W = (w_{i,j}) \sim W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$ , すなわち,  $W$  は実 Wishart 分布  $W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  に従うとする.  $A$  と  $B$  を次で定義される行列とする:  $a_{u,v} = \sigma_{u,v}$ ,  $b_{u,v} = \delta_{u,v}$ . このとき次が成り立つ:

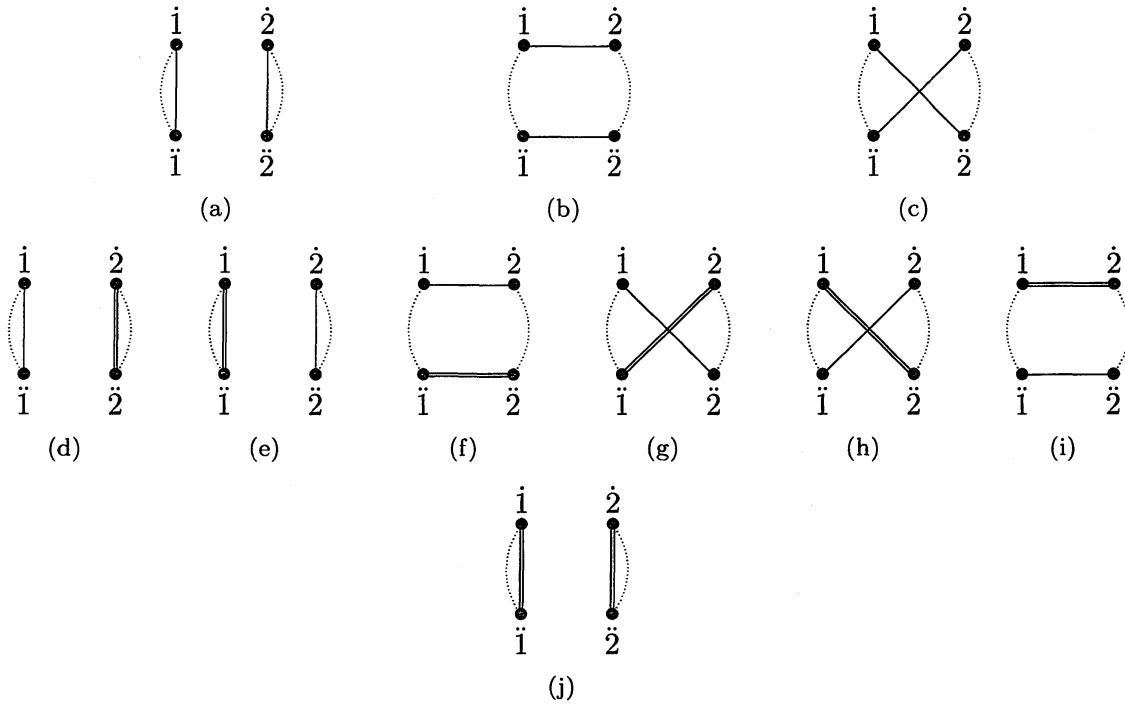
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w_{1,2} w_{3,4} \cdots w_{2n-1,2n}] &= \mathbb{E}[w_{1,\bar{1}} w_{2,\bar{2}} \cdots w_{n,\bar{n}}] \\ &= \nu^n \text{Hf}_{\nu-1}(A, B) = \text{Hf}_{\nu-1}(\nu A, \nu B). \end{aligned}$$

ここから次が導かれる:

**Theorem 4.2.**  $A$  と  $B$  を次で定義される行列とする:  $a_{u,v} = \sigma_{i_u, i_v}$ ,  $b_{u,v} = \delta_{i_u, i_v}$ .  $W \sim W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}] &= \mathbb{E}[w_{i_1, i_{\bar{1}}} w_{i_2, i_{\bar{2}}} \cdots w_{i_n, i_{\bar{n}}}] \\ &= \nu^n \text{Hf}_{\nu-1}(A, B) = \text{Hf}_{\nu-1}(\nu A, \nu B). \end{aligned}$$

**Example 4.3.**  $n = 2$  の時を考える. このときの  $\mathcal{M}'(V')$  を列挙すると図 6 で実線 (一重線) で描かれたグラフ達となる. また, 実線で描かれたグラフを  $E'$  としたとき,  $\check{E}'$  は二重線で描かれたグラフである. 点線は  $E'_0$  を表している. したがって,

図 6  $n = 2$  のときの  $\mathcal{M}'(V')$ 

$$\begin{aligned}
 \text{Hf}_\alpha(x, y) = & \underbrace{x_{1\bar{1}}x_{2\bar{2}}}_{\text{図 6(a)}} + \underbrace{\alpha x_{1\bar{2}}x_{2\bar{1}}}_{\text{図 6(b)}} + \underbrace{\alpha x_{1\bar{2}}x_{2\bar{1}}}_{\text{図 6(c)}} \\
 & + \underbrace{\alpha x_{1\bar{1}}y_{2\bar{2}}}_{\text{図 6(d)}} + \underbrace{\alpha x_{2\bar{2}}y_{1\bar{1}}}_{\text{図 6(e)}} + \underbrace{\alpha^2 x_{1\bar{2}}y_{1\bar{2}}}_{\text{図 6(f)}} + \underbrace{\alpha^2 x_{1\bar{2}}y_{1\bar{2}}}_{\text{図 6(g)}} + \underbrace{\alpha^2 x_{1\bar{2}}y_{1\bar{2}}}_{\text{図 6(h)}} + \underbrace{\alpha^2 x_{1\bar{2}}y_{1\bar{2}}}_{\text{図 6(i)}} \\
 & + \underbrace{\alpha^2 y_{1\bar{1}}y_{2\bar{2}}}_{\text{図 6(j)}}.
 \end{aligned}$$

したがって,  $W = (w_{ij}) \sim W_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  に対し,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[w_{ab}w_{cd}] = & \nu^2 \sigma_{ab}\sigma_{cd} \\
 & + \nu \sigma_{ac}\sigma_{db} + \nu \sigma_{ad}\sigma_{cb} + \nu \sigma_{ab}\delta_{cd} + \nu \sigma_{cd}\delta_{ab} \\
 & + \sigma_{ac}\delta_{bd} + \sigma_{ad}\delta_{bc} + \sigma_{bc}\delta_{ad} + \sigma_{bd}\delta_{ac} + \delta_{ab}\delta_{cd}
 \end{aligned}$$

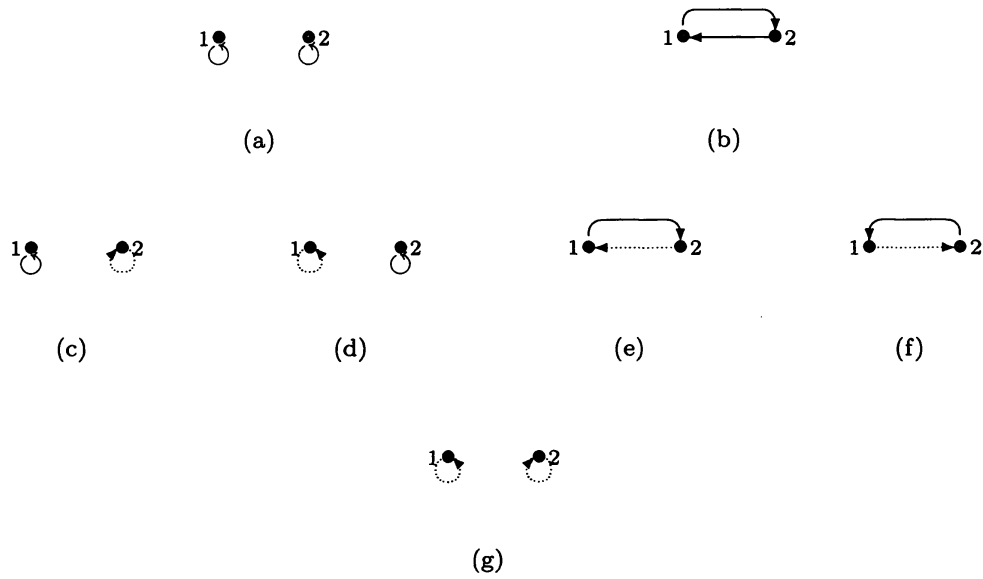
を得る.

また, 複素 Wishart 分布については次が成り立つ:

**Proposition 4.4.**  $W = (w_{i,j}) \sim CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  とし,  $A, B$  は次で定義される行列とする:

$a_{u,v} = \sigma_{\dot{u},\dot{v}}, b_{u,v} = \delta_{\dot{u},\dot{v}}$ . この時次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[w_{1,2}w_{3,4} \cdots w_{2n-1,2n}] &= \mathbb{E}[w_{1,\bar{1}}w_{2,\bar{2}} \cdots w_{n,\bar{n}}] \\
 &= \nu^n \det_{\nu-1}(A, B) = \det_{\nu-1}(\nu A, \nu B).
 \end{aligned}$$

図 7  $n = 2$  のときの  $\mathcal{M}(V)$ 

これから、次が導かれる:

**Theorem 4.5.**  $A, B$  を次を満たす行列とする:  $a_{u,v} = \sigma_{i_u, i_v}$ ,  $b_{u,v} = \delta_{i_u, i_v}$ . このとき,  $W = (w_{i,j}) \sim CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  に対し次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w_{i_1, i_2} w_{i_3, i_4} \cdots w_{i_{2n-1}, i_{2n}}] &= \mathbb{E}[w_{i_1, i_1} w_{i_2, i_2} \cdots w_{i_n, i_n}] \\ &= \nu^n \det_{\nu^{-1}}(A, B) = \det_{\nu^{-1}}(\nu A, \nu B). \end{aligned}$$

**Example 4.6.**  $n = 2$  の時を考える. このときの  $\mathcal{M}(V)$  を列挙すると図 7 で実線で描かれたグラフ達となる. また, 実線で描かれたグラフを  $E$  としたとき,  $\dot{E}$  は点線で描かれたグラフである. したがって  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$  に対し,

$$\begin{aligned} \det_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \underbrace{x_{11}x_{22}}_{\text{図 7(a)}} \\ &\quad + \underbrace{\alpha x_{12}x_{21}}_{\text{図 7(b)}} + \underbrace{\alpha x_{11}y_{22}}_{\text{図 7(c)}} + \underbrace{\alpha x_{22}y_{11}}_{\text{図 7(d)}} \\ &\quad + \underbrace{\alpha^2 x_{12}y_{21}}_{\text{図 7(e)}} + \underbrace{\alpha^2 x_{21}y_{12}}_{\text{図 7(f)}} + \underbrace{\alpha^2 y_{11}y_{22}}_{\text{図 7(g)}} \end{aligned}$$

となる. したがって,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{ab} & \sigma_{ad} \\ \sigma_{cb} & \sigma_{cd} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{ab} & \delta_{ad} \\ \delta_{cb} & \delta_{cd} \end{pmatrix}$$

を  $\nu^2 \det_{\nu-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  に代入することで,  $W = (w_{i,j}) \sim CW_p(\nu, \Sigma, \Delta)$  に対し,

$$\mathbb{E}[w_{ab}w_{cd}] = \nu^2 \sigma_{ab}\sigma_{cd} + \nu\sigma_{ad}\sigma_{cb} + \nu\sigma_{ab}\delta_{cd} + \nu\sigma_{cd}\delta_{ab} + \sigma_{ad}\delta_{cb} + \sigma_{cb}\delta_{ad} + \delta_{ab}\delta_{cd}$$

を得る.

**Remark 4.7.** 主定理により, パラメータが特別な値であるときには, Wishart 分布のモーメントの計算は, 条件をみたすグラフの数え上げに帰着できる. 詳細は [5, 12] に譲る.

## 参考文献

- [1] Bai, Z. D. (1999). Methodologies in spectral analysis of large dimensional random matrices, A review. *Statist. Sinica*, **9**, 611–677.
- [2] Goodman, N. R. (1963). Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (An introduction). *Ann. Math. Statist.*, **34**, 152–177.
- [3] Graczyk, P., Letac, G. and Massam, H. (2003). The complex Wishart distribution and the symmetric groups. *Ann. Statist.*, **31**, 287–309.
- [4] Graczyk, P., Letac, G. and Massam, H. (2005). The hyperoctahedral group, symmetric group representations and the moments of the real Wishart distribution. *J. Theor. Probab.*, **18**, 1–42.
- [5] Kuriki, S. and Numata, Y. (2010). Graph presentations for moments of noncentral Wishart distributions and their applications, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **62**, 645–672. doi:10.1007/s10463-010-0279-4.
- [6] Letac, G. and Massam, H. (2008). The noncentral Wishart as an exponential family, and its moments. *J. Multivariate Anal.*, **99**, 1393–1417.
- [7] Lu, I-L. and Richards, D. St. P. (2001). MacMahon’s master theorem, representation theory, and moments of Wishart distributions. *Adv. Appl. Math.*, **27**, 531–547.
- [8] Maiwald, D. and Kraus, D. (2000). Calculation of moments of complex Wishart and complex inverse Wishart distributed matrices. *IEE Proc.-Radar, Sonar Navig.*, **147**, 162–168.
- [9] Matsumoto, S. (2005)  $\alpha$ -Pfaffian, pfaffian point process and shifted Schur measure. *Linear Algebra and its Applications*, **403**, 369–398.
- [10] Matsumoto, S. (2010) General moments of the inverse real Wishart distribution and orthogonal Weingarten functions, arXiv:1004.4717v2
- [11] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons
- [12] Numata, Y. and Kuriki, S. (2009). On formulas for moments of the Wishart distributions as weighted generating functions of matchings, DMTCS Proceedings, 22nd International

- Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2010), pp. 953-964. (online journal)
- [13] Vere-Jones, D. (1988). A generalization of permanents and determinants. *Linear Algebra Appl.*, **111**, 119–124.
  - [14] Vere-Jones, D. (1997). Alpha-permanents and their applications to multivariate gamma, negative binomial and ordinary binomial distributions. *New Zealand J. Math.*, **26**, 125–149.
  - [15] Wishart, J. (1928). The generalised product moment distribution in samples from a normal multivariate population. *Biometrika*, **20A**, 32–52.